

Correlação Canônica

Outubro / 1998

Versão preliminar

Fabio Vessoni

fabio@mv2.com.br

(011) 30642254

MV2 Sistemas de Informação

Introdução

Existem várias formas de analisar dois conjuntos de dados. Um dos modelos mais comuns de análise é a regressão múltipla. Na regressão múltipla, uma variável é explicada por uma combinação linear de outras variáveis. A variável a ser explicada é chamada de dependente e as variáveis explicativas são chamadas de independentes. A equação básica de uma regressão múltipla pode ser expressa por:

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

A correlação canônica pode ser vista como uma extensão da regressão múltipla. Na correlação canônica existem duas ou mais variáveis dependentes. A equação básica pode ser expressa por:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

O princípio básico em uma correlação canônica é desenvolver uma combinação linear em cada um dos conjuntos de variáveis tal que a correlação entre os dois conjuntos seja maximizada. Na correlação canônica não existe a distinção entre variável independente e dependente, existem somente dois conjuntos de variáveis em que se busca a máxima correlação entre ambos.

Este não é um trabalho original, sendo somente uma compilação da bibliografia utilizada.

Técnicas para o estudo de inter-relações entre dois conjuntos de dados

Supondo uma base de dados coletada por uma companhia junto a seus clientes, que deseja avaliar a relação entre duas variáveis de uso de crédito contra duas características de seus clientes. Ambos os conjuntos são compostos de variáveis numéricas.

As variáveis dependentes são: número de cartões de crédito da família e a despesa mensal com cartões de crédito. As variáveis independentes são: tamanho da família e a renda familiar.

Como alternativa para analisar estes dados, podemos:

- (1) Estudar as correlações entre as variáveis dependentes e independentes. Esta abordagem é limitada por várias razões. Primeiro, o número de correlações será grande (neste caso, 2x2, normalmente muito maior). Segundo, existe o problema da multicolinearidade, ou seja, as variáveis independentes são correlacionadas entre si, assim como as variáveis dependentes, não sendo possível isolar o efeito de cada uma das variáveis. Terceiro, o

caráter subjetivo da análise não permitirá identificar quais serão os casos em que teremos o melhor 'índice' nas variáveis dependentes.

- (2) Calcular uma série de regressões múltiplas e analisar cada variável dependente em relação a todas as variáveis independentes. Dado que as variáveis dependentes não são independentes entre si, as equações resultantes também não serão descorrelacionadas. Além disso, este método só permite a análise em uma direção.
- (3) Análise de fatores. A análise de fatores estuda o inter-relacionamento em um conjunto de variáveis, o que não se aplica a este caso, dado haver dois conjuntos de variáveis.
- (4) Análise de fatores em cada conjunto de dados e correlação dos fatores resultantes. A análise de fatores se preocupa com a variância dentro de cada conjunto de dados, não considerando um importante componente na questão proposta, a variância compartilhada entre os dois conjuntos.
- (5) Correlação canônica. Calcular dois 'índices' compostos pela soma ponderada de cada variável em cada conjunto de dados e maximizar, através dos pesos de cada variável, a correlação entre estes dois conjuntos. Este método é uma alternativa aos quatro métodos apresentados anteriormente, não apresentando os problemas do 'excesso de resultados' do item 1, nem os problemas de multicolinearidade ou intercorrelação entre as equações resultantes.

Correlação canônica

O objetivo da correlação canônica é determinar uma combinação linear para cada grupo de variáveis (dependentes e independentes) que maximize a correlação entre os dois grupos. Funções adicionais não correlacionadas com a primeira podem ser calculadas, sendo limitadas pelo número de variáveis do menor grupo.

A matemática utilizada para o cálculo da função canônica não será descrita neste trabalho.

Uma forma de expressar uma correlação canônica pode ser:

Determine uma combinação linear entre x e y ,

$$U = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$V = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ny_n$$

tal que a correlação $Corr(U, V)$ seja maximizada.

Detalhando um pouco mais,

Suponha X sendo uma matriz $n \times p$ e Y $n \times q$.

$$C = cov(X, Y)$$

Separar esta matriz C em quatro partes:

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{pxp}^{11} & \sum_{pxq}^{12} \\ \sum_{qxp}^{21} & \sum_{qxq}^{22} \end{bmatrix}$$

As covariâncias entre variáveis de diferentes conjuntos, uma variável de X e outra de Y estarão contidas em (12) ou, (21). Analisar as covariâncias em (12) ou (21) pode ser extremamente trabalhoso, ainda mais se p e q forem grandes. Porém, o principal objetivo da correlação canônica é resumir as associações entre X e Y em função de algumas poucas correlações escolhidas, ao invés das pxq correlações.

Combinação linear é uma forma simples de resumir um conjunto de variáveis, então seja:

$$U = a'X$$

$$V = b'Y$$

$$Var(U) = a' Cov(X) a = a' \sum_{11} a$$

$$Var(V) = b' Cov(Y) b = b' \sum_{22} b$$

$$Cov(U, V) = a' Cov(X, Y) b = a' \sum_{12} b$$

O que a correlação canônica procura é determinar os vetores a e b tais que

$$Corr(U, V) = \frac{a' \sum_{12} b}{\sqrt{a' \sum_{11} a} \sqrt{b' \sum_{22} b}}$$

seja a maior possível. Existirão $\min(p, q) - 1$ pares de variáveis canônicas independentes do par de correlação máxima, que irão expressar a variância total dos dois grupos de variáveis.

Para calcular este máximo,

$$\max_{a, b} Corr(U, V) = \rho_1^*$$

restrita pela combinação linear (primeiro par de variáveis canônicas):

$$U_1 = \underbrace{e_1' \sum_{11}^{-1/2}}_{a_1'} X \quad e \quad V_1 = \underbrace{f_1' \sum_{22}^{-1/2}}_{b_1'} Y$$

Neste caso, ρ_1^{*2} é o autovalor de $\sum_{11}^{-1/2} \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \sum_{11}^{-1/2}$ e e_1 é seu respectivo autovetor.

Supondo 'A' uma matriz quadrada kxk e 'v' um vetor kx1, pode-se mostrar que a equação

$$Av = \lambda v$$

tem k soluções, sendo λ um escalar. Cada solução é dada por um par formado por um escalar λ_i e um vetor v_i . O escalar é chamado de autovalor de A e o vetor de autovetor de A.

A prova para o resultado acima pode ser encontrada em Johnson e Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*.

O k-ésimo par de variáveis canônicas pode ser descrito como:

$$U_k = e_k' \sum_{11}^{-1/2} X \quad e \quad V_k = f_k' \sum_{22}^{-1/2} Y$$

maximizando,

$$Corr(U_k, V_k) = \rho_k^*$$

Passos para o cálculo de uma correlação canônica

Podem ser definidos seis passos para o cálculo e interpretação de uma correlação canônica. São eles: (1) especificação dos objetivos da análise, (2) desenvolvimento do plano de análise, (3) teste das hipóteses da correlação, (4) estimativa do modelo e cálculo do poder de explicação, (5) interpretação dos resultados, e (6) validação do modelo.

A seguir será descrito cada um dos seis passos acima:

- (1) Especificação dos objetivos da análise: Como já demonstrado, a análise canônica trata de uma associação entre dois grupos de variáveis. Ao especificar os objetivos da análise, estes dois grupos devem ser identificados, e vários objetivos podem ser perseguidos, como: determinar se existe alguma correlação entre os grupos, ou, explicar a natureza da relação entre estes grupos, medindo a contribuição de cada variável em cada equação.
- (2) Desenvolvimento do plano de análise: Especificar o tamanho da amostra e forma de obtenção destes dados. O tamanho mínimo recomendado da amostra é de 10 vezes o número de variáveis a serem analisadas.
- (3) Premissas: Testar cada uma das variáveis para linearidade da correlação, normalidade, homocedasticidade, e, multicolinearidade.

- (4) Cálculo do modelo: Calcular os autovetores e autovalores, como descrito anteriormente, e os outros resultados, como 'loadings' e 'cross-loadings' (a serem explicados no exemplo).
- (5) Interpretação dos resultados: Testar a significância das relações e de cada um dos índices, como: pesos, 'loadings' e 'cross-loadings'.
- (6) Validação do modelo: Testar o modelo em outra amostra e verificar se o mesmo reage de acordo com o esperado.

Testando uma correlação canônica

Para teste do modelo proposto (e validação dos resultados) será usada uma base de dados extraída de Hair, Anderson, Tatham e Black, *Multivariate Data Analysis*.

A base de dados em questão consiste em uma série de medidas extraídas de 100 consumidores de uma empresa (HATCO). As variáveis foram normalizadas para o cálculo em questão.

As variáveis independentes são: prazo de entrega, nível de preço, flexibilidade de preço, qualidade da manufatura, nível de serviço, qualidade da equipe de vendas e qualidade do produto. As variáveis dependentes são: nível de uso e a satisfação do cliente.

Seguiremos os 6 passos propostos anteriormente.

- (1) Objetivos da análise: o objetivo deste teste será determinar qual a percepção dos consumidores da HATCO quanto a sua eficiência e o nível de uso e satisfação.
- (2) Plano de análise: os dois grupos de dados estão facilmente caracterizados e excedem o tamanho mínimo de amostra ($7 \text{ variáveis} \times 10 = 70 \text{ casos no mínimo}$). A base de dados utilizada pode ser encontrada no apêndice.
- (3) Premissas: todas as variáveis analisadas foram devidamente testadas quanto às hipóteses descritas.
- (4) Cálculo do modelo:

Function	1						
A	0,2260	0,1036	0,5681	0,3476	0,4444	-0,0502	0,0005
B	0,5005	0,5802					
var X*	1,000001						
var Y*	1						
Can Corr	0,936913						

Function	2						
A	0,9661	0,8695	-0,1594	1,4558	-1,5320	-0,7363	-0,4775
B	-1,3304	1,2977					
var X*	1,000001						
var Y*	1						
Can Corr	0,510023						

		Uncorrelated with		1	
		a		(0,00000)	
		b		-	

Ambas as funções devem ser testadas, tanto isoladamente, como em conjunto. Os testes a serem empregados são: lambda de Wilks, critério de Pillai, traço de Hotelling e a maior raiz de Roy. Todos estes testes verificam a significância das funções do ponto de vista estatístico.

Para o teste de cada correlação canônica podemos utilizar a distribuição de qui-quadrado. A fórmula para esta distribuição é:

$$\chi^2 = -[N - 1 - 0,5(p + q + 1)] \ln \left[\prod_{i=1}^q (1 - R_{ci}^2) \right]$$

onde

N = tamanho da amostra,

p = número de variáveis dependentes,

q = número de variáveis independentes,

R² = correlação canônica ao quadrado da equação a ser testada.

A distribuição de qui-quadrado em questão terá p x q graus de liberdade.

A correlação canônica elevada ao quadrado é uma boa estimativa da variância compartilhada entre os dois grupos. O problema é que esta variação se refere somente a cada uma das funções separadamente, fazendo com que uma parte da variância não seja levada em conta. Um novo índice pode ser calculado para evitar este viés, o índice de redundância.

Este índice pode ser calculado como a média dos quadrados dos coeficientes de correlação entre o total das variáveis independentes e cada variável dependente. Este índice corresponde a um resumo da habilidade de um conjunto de variáveis independentes (tomadas em conjunto) explicarem uma variação nas variáveis dependentes (tomadas uma a uma). Este índice pode ser comparado ao R² de uma regressão múltipla.

O índice de redundância para a primeira função é de 0,7503 para as variáveis dependentes, o que demonstra que 75 % da variação do grupo dependente pode ser explicado pelas variáveis independentes escolhidas. Para a segunda função o índice de redundância para as variáveis dependentes é de 0,0378. Apesar de estatisticamente significativa, a segunda função não possui significância prática, sendo descartada.

A primeira função canônica fica:

$$0,5005Y_1 + 0,5802Y_2 = 0,2260X_1 + 0,1036X_2 + 0,5681X_3 + 0,3476X_4 + 0,4444X_5 - 0,0502X_6 + 0,0005X_7$$

Os coeficientes da equação acima são os ‘pesos canônicos’ e são similares aos ‘betas’ de uma regressão múltipla. O uso dos pesos para analisar uma função canônica pode acarretar em alguns problemas, como, instabilidade dos valores em função da amostra, e dificuldade de interpretação dos valores em um ambiente com multicolinearidade.

Uma alternativa ao uso dos pesos é o cálculo dos ‘canonical loadings’ (cargas canônicas) ou correlações estruturais. Estes índices se referem à correlação entre uma das variáveis, dependente ou independente, e o índice do grupo em questão. A carga canônica reflete a variância que uma determinada variável compartilha com o grupo e pode ser interpretada como a carga em uma análise de fatores. Quanto mais alta a carga canônica, maior a importância da variável no grupo. As cargas canônicas também sofrem, como os pesos, de instabilidade em função da amostra, mas são consideradas mais estáveis como modo de interpretação dos resultados.

Uma terceira forma de analisar os dados de uma correlação canônica é o uso dos ‘canonical cross-loadings’ ou cargas canônicas cruzadas. Este procedimento correlaciona cada uma das variáveis com o índice do grupo oposto, ou seja, as variáveis dependentes são correlacionadas com o índice independente e vice-versa. Esta forma é a mais utilizada para a análise das funções, sendo inclusive adotada pelos principais pacotes estatísticos, como o SAS.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	Y1	Y2	X*1	X*2	Y*1	Y*2
X1	1,00	-0,35	0,51	0,05	0,61	0,08	-0,48	0,68	0,65	0,7645	-0,1090	0,7161	-0,0557
X2		1,00	-0,49	0,27	0,51	0,19	0,47	0,08	0,03	0,0614	-0,1413	0,0575	-0,0721
X3			1,00	-0,12	0,07	-0,03	-0,45	0,56	0,52	0,6235	-0,1228	0,5843	-0,0627
X4				1,00	0,30	0,79	0,20	0,22	0,48	0,4145	0,6263	0,3884	0,3193
X5					1,00	0,24	-0,06	0,70	0,63	0,7654	-0,2215	0,7170	-0,1131
X6						1,00	0,18	0,26	0,34	0,3481	0,1996	0,3260	0,1017
X7							1,00	-0,19	-0,28	-0,2784	-0,2188	0,2607	-0,1116
Y1								1,00	0,71	0,8554	-0,2080	0,9129	-0,4082
Y2									1,00	0,8769	0,1797	0,9360	0,3521
X*1										1,0000	0,0000	0,93691	-0,0001
X*2											1,0000	0,0002	0,51002
Y*1												1,0000	0,0000
Y*2													1,0000

Canonical loadings

Canonical cross-loadings

(5) Interpretação dos resultados:

Dado que a função 1 foi considerada válida e estatisticamente significativa, podemos analisar os índices segundo as três formas propostas anteriormente.

		Pesos	Loadings	Cross-Loadings
X1	prazo de entrega	0,2260	0,7645	0,7161
X2	nível de preço	0,1036	0,0614	0,0575
X3	flexibilidade de preço	0,5681	0,6235	0,5843
X4	qualidade da manufatura	0,3476	0,4145	0,3884
X5	nível de serviço	0,4444	0,7654	0,7170
X6	qualidade da equipe de vendas	-0,0502	0,3481	0,3260
X7	qualidade do produto	0,0005	-0,2784	-0,2607
<hr/>				
Y1	nível de uso	0,5005	0,9129	0,8554
Y2	satisfação do cliente	0,5802	0,9360	0,8769

Quanto aos pesos, podemos ordenar as variáveis em função de sua magnitude. Assim sendo, a variável mais importante é X3 (flexibilidade de preço), enquanto que a variável dependente mais importante é Y2 (satisfação do cliente). Este tipo de análise não é recomendado, dado que pode haver problema de multicolinearidade, afetando estes resultados.

Analisando as cargas canônicas (loadings), podemos verificar inclusive um dos fatores como negativo (X7). As cargas são otimizadas para a correlação, e não para a interpretação.

Já com os cargas canônicas cruzadas (cross-loadings), podemos verificar que as correlações entre as variáveis dependentes (Y1 e Y2) e o conjunto dependente são bastante elevadas. Elevando estas correlações ao quadrado, podemos calcular quanto da variância destas variáveis pode ser explicado pelo conjunto dependente. Para Y1, 73 % ($0,8554^2$), e para Y2, 77 % ($0,8769^2$).

(6) Validação do modelo

O último passo envolve calcular novamente os resultados com uma segunda amostra. Uma alternativa à este cálculo pode ser uma análise de sensibilidade, retirando algumas variáveis independentes e verificando a estabilidade dos cálculos.

Conclusões

A técnica de correlação canônica pode ser muito útil em problemas que possuam mais de uma variável métrica dependente. O uso da correlação canônica pode simplificar o problema e determinar quais variáveis são mais importantes na análise. Desta forma, podemos realizar a análise em duas etapas, primeiro determinando os fatores relevantes, e posteriormente realizando regressões simples entre os mesmos.

Pode haver uma significativa redução de complexidade e consequente facilidade na interpretação do problema.

Bibliografia

Hair, Joseph F. & Anderson, Rolph E. & Tatham, Ronald L. & Black, William C. *Multivariate Data Analysis*, 4ª edição, 1995

Johnson, Richard A. & Wichern, Dean W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 3ª edição, 1992

Weiss, David J. Canonical Correlation Analysis in Counseling Psychology Research. *Journal of Counseling Psychology*, 1972, vol 9, no. 3, 241-252

Ashley, David W. A Canonical Correlation Procedure for Spreadsheets. 27th Annual Meeting of the Decision Sciences Institute, November 24-26, 1996

Apêndice

Dados de entrada. (extraídos do livro ‘Multivariate Data Analysis’)

Caso	Independentes							Dependentes	
	1	2	3	4	5	6	7	9	10
1	4,10	0,60	6,90	4,70	2,40	2,30	5,20	32,00	4,20
2	1,80	3,00	6,30	6,60	2,50	4,00	8,40	43,00	4,30
3	3,40	5,20	5,70	6,00	4,30	2,70	8,20	48,00	5,20
4	2,70	1,00	7,10	5,90	1,80	2,30	7,80	32,00	3,90
5	6,00	0,90	9,60	7,80	3,40	4,60	4,50	58,00	6,80
6	1,90	3,30	7,90	4,80	2,60	1,90	9,70	45,00	4,40
7	4,60	2,40	9,50	6,60	3,50	4,50	7,60	46,00	5,80
8	1,30	4,20	6,20	5,10	2,80	2,20	6,90	44,00	4,30
9	5,50	1,60	9,40	4,70	3,50	3,00	7,60	63,00	5,40
10	4,00	3,50	6,50	6,00	3,70	3,20	8,70	54,00	5,40
11	2,40	1,60	8,80	4,80	2,00	2,80	5,80	32,00	4,30
12	3,90	2,20	9,10	4,60	3,00	2,50	8,30	47,00	5,00
13	2,80	1,40	8,10	3,80	2,10	1,40	6,60	39,00	4,40
14	3,70	1,50	8,60	5,70	2,70	3,70	6,70	38,00	5,00
15	4,70	1,30	9,90	6,70	3,00	2,60	6,80	54,00	5,90
16	3,40	2,00	9,70	4,70	2,70	1,70	4,80	49,00	4,70
17	3,20	4,10	5,70	5,10	3,60	2,90	6,20	38,00	4,40
18	4,90	1,80	7,70	4,30	3,40	1,50	5,90	40,00	5,60
19	5,30	1,40	9,70	6,10	3,30	3,90	6,80	54,00	5,90
20	4,70	1,30	9,90	6,70	3,00	2,60	6,80	55,00	6,00
21	3,30	0,90	8,60	4,00	2,10	1,80	6,30	41,00	4,50
22	3,40	0,40	8,30	2,50	1,20	1,70	5,20	35,00	3,30
23	3,00	4,00	9,10	7,10	3,50	3,40	8,40	55,00	5,20
24	2,40	1,50	6,70	4,80	1,90	2,50	7,20	36,00	3,70
25	5,10	1,40	8,70	4,80	3,30	2,60	3,80	49,00	4,90
26	4,60	2,10	7,90	5,80	3,40	2,80	4,70	49,00	5,90
27	2,40	1,50	6,60	4,80	1,90	2,50	7,20	36,00	3,70
28	5,20	1,30	9,70	6,10	3,20	3,90	6,70	54,00	5,80
29	3,50	2,80	9,90	3,50	3,10	1,70	5,40	49,00	5,40
30	4,10	3,70	5,90	5,50	3,90	3,00	8,40	46,00	5,10
31	3,00	3,20	6,00	5,30	3,10	3,00	8,00	43,00	3,30
32	2,80	3,80	8,90	6,90	3,30	3,20	8,20	53,00	5,00
33	5,20	2,00	9,30	5,90	3,70	2,40	4,60	60,00	6,10
34	3,40	3,70	6,40	5,70	3,50	3,40	8,40	47,00	3,80
35	2,40	1,00	7,70	3,40	1,70	1,10	6,20	35,00	4,10
36	1,80	3,30	7,50	4,50	2,50	2,40	7,60	39,00	3,60
37	3,60	4,00	5,80	5,80	3,70	2,50	9,30	44,00	4,80
38	4,00	0,90	9,10	5,40	2,40	2,60	7,30	46,00	5,10
39	0,00	2,10	6,90	5,40	1,10	2,60	8,90	29,00	3,90
40	2,40	2,00	6,40	4,50	2,10	2,20	8,80	28,00	3,30
41	1,90	3,40	7,60	4,60	2,60	2,50	7,70	40,00	3,70
42	5,90	0,90	9,60	7,80	3,40	4,60	4,50	58,00	6,70
43	4,90	2,30	9,30	4,50	3,60	1,30	6,20	53,00	5,90
44	5,00	1,30	8,60	4,70	3,10	2,50	3,70	48,00	4,80

45	2,00	2,60	6,50	3,70	2,40	1,70	8,50	38,00	3,20
46	5,00	2,50	9,40	4,60	3,70	1,40	6,30	54,00	6,00
47	3,10	1,90	10,00	4,50	2,60	3,20	3,80	55,00	4,90
48	3,40	3,90	5,60	5,60	3,60	2,30	9,10	43,00	4,70
49	5,80	0,20	8,80	4,50	3,00	2,40	6,70	57,00	4,90
50	5,40	2,10	8,00	3,00	3,80	1,40	5,20	53,00	3,80
51	3,70	0,70	8,20	6,00	2,10	2,50	5,20	41,00	5,00
52	2,60	4,80	8,20	5,00	3,60	2,50	9,00	53,00	5,20
53	4,50	4,10	6,30	5,90	4,30	3,40	8,80	50,00	5,50
54	2,80	2,40	6,70	4,90	2,50	2,60	9,20	32,00	3,70
55	3,80	0,80	8,70	2,90	1,60	2,10	5,60	39,00	3,70
56	2,90	2,60	7,70	7,00	2,80	3,60	7,70	47,00	4,20
57	4,90	4,40	7,40	6,90	4,60	4,00	9,60	62,00	6,20
58	5,40	2,50	9,60	5,50	4,00	3,00	7,70	65,00	6,00
59	4,30	1,80	7,60	5,40	3,10	2,50	4,40	46,00	5,60
60	2,30	4,50	8,00	4,70	3,30	2,20	8,70	50,00	5,00
61	3,10	1,90	9,90	4,50	2,60	3,10	3,80	54,00	4,80
62	5,10	1,90	9,20	5,80	3,60	2,30	4,50	60,00	6,10
63	4,10	1,10	9,30	5,50	2,50	2,70	7,40	47,00	5,30
64	3,00	3,80	5,50	4,90	3,40	2,60	6,00	36,00	4,20
65	1,10	2,00	7,20	4,70	1,60	3,20	10,00	40,00	3,40
66	3,70	1,40	9,00	4,50	2,60	2,30	6,80	45,00	4,90
67	4,20	2,50	9,20	6,20	3,30	3,90	7,30	59,00	6,00
68	1,60	4,50	6,40	5,30	3,00	2,50	7,10	46,00	4,50
69	5,30	1,70	8,50	3,70	3,50	1,90	4,80	58,00	4,30
70	2,30	3,70	8,30	5,20	3,00	2,30	9,10	49,00	4,80
71	3,60	5,40	5,90	6,20	4,50	2,90	8,40	50,00	5,40
72	5,60	2,20	8,20	3,10	4,00	1,60	5,30	55,00	3,90
73	3,60	2,20	9,90	4,80	2,90	1,90	4,90	51,00	4,90
74	5,20	1,30	9,10	4,50	3,30	2,70	7,30	60,00	5,10
75	3,00	2,00	6,60	6,60	2,40	2,70	8,20	41,00	4,10
76	4,20	2,40	9,40	4,90	3,20	2,70	8,50	49,00	5,20
77	3,80	0,80	8,30	6,10	2,20	2,60	5,30	42,00	5,10
78	3,30	2,60	9,70	3,30	2,90	1,50	5,20	47,00	5,10
79	1,00	1,90	7,10	4,50	1,50	3,10	9,90	39,00	3,30
80	4,50	1,60	8,70	4,60	3,10	2,10	6,80	56,00	5,10
81	5,50	1,80	8,70	3,80	3,60	2,10	4,90	59,00	4,50
82	3,40	4,60	5,50	8,20	4,00	4,40	6,30	47,00	5,60
83	1,60	2,80	6,10	6,40	2,30	3,80	8,20	41,00	4,10
84	2,30	3,70	7,60	5,00	3,00	2,50	7,40	37,00	4,40
85	2,60	3,00	8,50	6,00	2,80	2,80	6,80	53,00	5,60
86	2,50	3,10	7,00	4,20	2,80	2,20	9,00	43,00	3,70
87	2,40	2,90	8,40	5,90	2,70	2,70	6,70	51,00	5,50
88	2,10	3,50	7,40	4,80	2,80	2,30	7,20	36,00	4,30
89	2,90	1,20	7,30	6,10	2,00	2,50	8,00	34,00	4,00
90	4,30	2,50	9,30	6,30	3,40	4,00	7,40	60,00	6,10
91	3,00	2,80	7,80	7,10	3,00	3,80	7,90	49,00	4,40
92	4,80	1,70	7,60	4,20	3,30	1,40	5,80	39,00	5,50
93	3,10	4,20	5,10	7,80	3,60	4,00	5,90	43,00	5,20
94	1,90	2,70	5,00	4,90	2,20	2,50	8,20	36,00	3,60

95	4,00	0,50	6,70	4,50	2,20	2,10	5,00	31,00	4,00
96	0,60	1,60	6,40	5,00	0,70	2,10	8,40	25,00	3,40
97	6,10	0,50	9,20	4,80	3,30	2,80	7,10	60,00	5,20
98	2,00	2,80	5,20	5,00	2,40	2,70	8,40	38,00	3,70
99	3,10	2,20	6,70	6,80	2,60	2,90	8,40	42,00	4,30
100	2,50	1,80	9,00	5,00	2,20	3,00	6,00	33,00	4,40
Média	3,52	2,36	7,89	5,25	2,92	2,67	6,97	46,10	4,77
Desvio Padrão	1,31	1,19	1,38	1,13	0,75	0,77	1,58	8,94	0,85